METODE BEDA HINGGA DAN TEOREMA NEWTON UNTUK MENENTUKAN JUMLAH DERET

(Finite Difference Method and Newton's Theorem to Determine the Sum of Series)

Tri Mulyani[1)], Moh. Hasan[2)], Slamin[3)]
[1])Staf Pengajar Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Jember
[2])Staf Pengajar Jurusan Magister Matematika FMIPA Universitas Negeri Jember
[3])Staf Pengajar Jurusan Magister Matematika FMIPA Universitas Negeri Jember
Email: threemulyani@gmail.com

ABSTRAK

Permasalahan yang sering dihadapi untuk membuktikan kebenaran rumus suatu deret adalah jika yang disajikan rumus suatu deret yang bukan deret aritmatika dan bukan deret geometri. Salah satu pembuktian yang paling sering dipakai adalah pembuktian dengan induksi matematika. Penelitian ini dilakukan untuk menentukan rumus jumlah *n* suku pertama dari: (1) deret aritmatika, deret arirmatika bertingkat dengan landasan deret aritmatika; (2) deret geometri; (3) deret aritmatika bertingkat dengan landasan deret geometri; dan (4) deret yang bukan deret aritmatika dan bukan deret geometri yang diketahui rumus suku ke-*n*nya, dengan menggunakan metode beda hingga dan teorema Newton. Rumus jumlah *n* suku pertama yang diperoleh dari hasil penelitian kemudian dibuktikan kebenarannya dengan menggunakan induksi matematika.

Kata Kunci: deret, beda hingga, induksi matematika, teorema Newton

ABSTRACT

Problems that are often faced to prove the truth of a formula if the presented series is a series that is not the formula of arithmetic and geometric series. One proof among the most commonly proofs used is the proof by mathematical induction. This study was conducted to determine the sum of the first n terms formula of: (1) arithmetic series, storied arithmetic series with the basis of arithmetic series, (2) geometric series, (3) storied arithmetic series with the basis of geometric series, and (4) series which are not arithmetic and geometric series that the formula of the n terms is given, by using the finite difference method and Newton's theorem. The formula of the sum of the first n terms obtained from the results of this study and then it is verified by using mathematical induction.

Keywords: series, finite difference, mathematical induction, Newton’s theorem

1. PENDAHULUAN

Pada beberapa buku teks umumnya disajikan tentang rumus jumlah suatu deret yang bukan deret aritmatika dan bukan deret geometri dan pembaca diminta untuk membuktikan kebenarannya, diantaranya menurut Nasution *et al.* (1993); Purcell dan Varberg (1999); Lovasz *et al*. (2003) dan Rosen (2007) ada beberapa deret terhingga yang suku umumnya merupakan fungsi bilangan asli *n*, yang penting untuk diketahui jumlah *n* suku pertamanya. Deret–deret itu adalah:

a. $T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ b. $Q_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. c. $K_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

d. $R_n = 2\sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+3)}{3}$.

e. $B_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. f. $A_n = \sum_{k=1}^{n}\left[a+(k-1)b\right] = n\left[a+\frac{1}{2}(n-1)b\right]$.

g. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4+2^4+3^4+...+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$ g. $G_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}; r \neq 1.$ (1)

Berdasarkan persamaan (1) dalam penelitian ini diteliti bagaimana cara untuk mendapatkan rumus jumlah deretnya kemudian dibuktikan kebenarannya dengan induksi matematika. Pembuktian dengan menggunakan induksi matematika memuat dua langkah penting yaitu: (1) langkah dasar, diuji untuk n = 1; (2) langkah induksi, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k,$ sehingga harus dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k + 1$.

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah menemukan metode yang lebih efisien untuk menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret yang mempunyai aturan tertentu. Permasalahan dalam penelitian ini dibatasi pada: (1) deret aritmatika; (2) deret geometri; (3) deret aritmatika bertingkat dengan landasan deret geometri; (4) deret dengan rumus umum suku ke n sudah diketahui.

Dasar teori yang melandasi dan berkaitan dengan penelitian ini adalah: fungsi polinomial, polinomial faktorial, beda hingga, teorema Newton serta barisan dan deret.

Definisi 1 (Fungsi) Sebuah **fungsi** f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut **daerah hasil** (jelajah) fungsi tersebut (Purcell dan Varberg, 1999).

Dalam penelitian ini akan digunakan fungsi polinomial. Bentuk umum fungsi Polinomial dalam variable x dan berderajat n dinotasikan sebagai berikut.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 x^0$. (2) untuk semua variabel x dalam R dimana $a_0, a_1, ..., a_n$ adalah bilangan real (konstanta) yang disebut koefisien fungsi polinomial.

Definisi 2 (Polinomial Faktorial) Pernyataan $x^{(n)}$ dibaca 'x, n faktorial' untuk n bulat positif, didefinisikan sebagai berikut (Soehardjo,2000a).

$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)(x-3).....(x-(n-1)) \quad (3)$$

$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}} = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)}. \quad (4)$$

Definisi 3 (Beda Hingga Maju) Jika U merupakan fungsi dalam variabel x, $U=f(x)$ biasa ditulis dengan U_x. Suatu fungsi f yang nilainya $f(t)$ pada waktu t dan bernilai $f(t+1)$ pada waktu $(t+1)$, maka beda pertama didefinisikan sebagai berikut (Soehardjo, 2000a).

$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ atau $\Delta U_x = U_{x+1} - U_x$.

$\Delta^2 U_x = \Delta(\Delta U_x) = \Delta(U_{x+1} - U_x) = \Delta U_{x+1} - \Delta U_x$

$\Delta^3 U_x = \Delta(\Delta^2 U_x) = \Delta(\Delta U_{x+1} - \Delta U_x) = \Delta^2 U_{x+1} - \Delta^2 U_x$.(5)

dengan: Δ disebut operator beda maju tingkat pertama; Δ^2 disebut operator beda maju tingkat dua; Δ^3 disebut operator beda maju tingkat tiga, dan seterusnya.Beda hingga tingkat tiga secara umum disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Beda Hingga tingkat tiga secara umum

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$	$\Delta^4 U_x$
0	U_0				
		ΔU_0			
1	U_1		$\Delta^2 U_0$		
		ΔU_1		$\Delta^3 U_0$	
2	U_2		$\Delta^2 U_1$		$\Delta^4 U_0$
		ΔU_2		$\Delta^3 U_1$	
3	U_3		$\Delta^2 U_2$		
		ΔU_3			
4	U_4				

Dari Tabel 1 pada kolom $\Delta^3 U_x$ nilainya konstan dan pada kolom $\Delta^4 U_x$ dan seterusnya bernilai 0, sehingga untuk polinomial berderajat *n* dalam variable *x* (U_x), pada tabel beda kolom ke $\Delta^n U_x$ nilainya konstan dan kolom ke $\Delta^{n+1} U_x$ dan seterusnya bernilai 0. Beda hingga yang digunakan pada penelitian ini adalah beda hingga maju (Δ)

Integral Hingga

Jika $\Delta U_x = V_x$ maka $U_x = \Delta^{-1} V_x$ dimana Δ^{-1} disebut operator Integral Hingga. Beberapa Rumus Integral Hingga menurut Soehardjo (2000a) adalah:

$$\Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{(a-1)} \quad ; a \neq 1. \qquad (6) \qquad \Delta^{-1} x^{(n)} = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} \quad ; n \neq -1. \qquad (7)$$

Teorema 1 (Teorema Newton) *Jika* U_x *adalah polinomial derajat n dalam variabel x maka* U_x *dapat ditulis dalam bentuk* (Soehardjo, 2000a)

$$U_x = U_0 + \frac{\Delta U_0}{1!} x^{(1)} + \frac{\Delta^2 U_0}{2!} x^{(2)} + \frac{\Delta^3 U_0}{3!} x^{(3)} + \ldots + \frac{\Delta^n U_0}{n!} x^{(n)}. \quad (8)$$

Suku–suku suatu barisan dipisahkan dengan tanda koma dan jika tanda koma diganti dengan tanda tambah maka disebut deret. Deret aritmatika bertingkat adalah deret aritmatika yang mempunyai beda tetap pada tingkat yang ke-*n*.

Deret aritmatika bertingkat dengan landasan deret geometri adalah suatu deret yang jika dibuat tabel beda hingganya maka pada tingkat tertentu akan membentuk deret geometri dengan rasio tetap. Deret tersebut mempunyai bentuk suku umum

$$U_x = f(x) + a.p^x \qquad (9)$$

dimana *f(x)* adalah fungsi polinomial derajat *n* dalam variabel *x*.

Misalnya:

1. $3+5+9+17+33+65+\ldots$;
2. $5+10+17+28+47+82+\ldots$.

Deret yang bukan merupakan deret aritmatika dan bukan deret geometri tetapi mempunyai aturan tertentu, misalnya:

1. $(1.2.3)+(2.3.4)+(3.4.5)+...+(n.(n+1)(n+2))$
2. $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\ ...\ +\frac{1}{(n+3)(n+4)}$
3. $\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{2.3.5}+\frac{1}{3.4.6}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ (10)

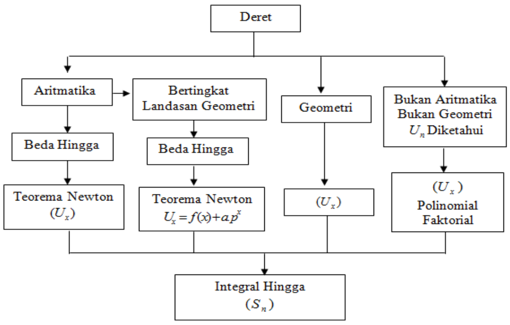
Jumlah Deret

Jika V_x adalah suatu fungsi yang beda pertamanya U_x maka $\Delta V_x = V_{x+1} - V_x = U_x \rightarrow V_x = \Delta^{-1} U_x$ dimana Δ^{-1} disebut operator Integral Hingga. Rumus umum jumlah n suku pertama dari deret $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots U_{n-1}$ yang memiliki beda tetap pada tingkat ke-n dengan mempergunakan beda hingga dan teorema Newton adalah

$$S_n = \sum_{x=0}^{n-1} U_x = \Delta^{-1} U_x \Big]_0^n \qquad (11)$$

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik yaitu dengan menerapkan teorema yang sudah ada untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama suatu deret yang mempunyai pola tertentu. Secara umum cara kerja yang akan dilakukan untuk menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret dapat disajikan dalam bentuk skema berikut.



Gambar 1 Skema Kerangka Berpikir

3. HASIL dan PEMBAHASAN

3.1 Deret Aritmatika

Berdasarkan persamaan (1.f), jika ditetapkan $U_1 = a$, maka deret tersebut dinotasikan dengan $a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)$ dan jumlah n suku pertamanya $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n}\left[a+(i-1)b\right] = \sum_{i=0}^{n-1}(a+bi)$ Berdasarkan langkah-langkah penelitian, dilakukan sebagai berikut.

1. Dibuat tabel beda hingga dari deret $a+(a+b)+(a+2b)+...+(a+(n-1)b)$ sebagai berikut.

Tabel 2 Beda Hingga dari $a+(a+b)+...+(a+(n-1)b)$

x	U_x	ΔU_x
0	a	
		b
1	$a+b$	
		b
2	$a+2b$	

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh: $U_0 = a$; $\Delta U_0 = b$

2. Dari data Tabel 2 ditentukan U_x dengan menggunakan teorema Newton persamaan (8) yaitu $U_x = U_0 + \frac{\Delta U_0}{1!}x^{(1)} + \frac{\Delta^2 U_0}{2!}x^{(2)} + \frac{\Delta^3 U_0}{3!}x^{(3)} + ... + \frac{\Delta^n U_0}{n!}x^{(n)}$.

didapatkan $U_x = a + bx^{(1)}$, dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai *x=0* , suku ke-*n* sesuai dengan nilai *x = n – 1.*

3. S_n didapatkan dengan mengintegralkan $U_x = a + bx^{(1)}$ sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=0}^{n-1} U_x = \sum_{x=0}^{n-1}\left(a + bx^{(1)}\right)$$

$$S_n = \Delta^{-1}\left\{a + bx^{(1)}\right\}\Big]_0^n$$

$$S_n = \left\{ax^{(1)} + \frac{1}{2}bx^{(2)}\right\}\Big]_0^n$$

$$S_n = \left(an^{(1)} + \frac{1}{2}bn^{(2)}\right) - 0$$

$$S_n = an + \frac{1}{2}bn(n-1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\left[2a + (n-1)b\right].$$

Contoh 1 Deret aritmatika bertingkat dengan landasan deret aritmatika. Untuk menentukan rumus jumlah *n* suku pertama dari $6+24+60+120+210+336+...$, berdasarkan langkah-langkah penelitian dilakukan sebagai berikut.

1.Dibuat tabel beda hingga dari deret $6+24+60+120+210+336+...$

Tabel 3 Beda Hingga dari $6+24+60+120+210+...$

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$	$\Delta^3 U_x$	$\Delta^4 U_x$
0	6				
		18			
1	24		18		
		36		6	
2	60		24		0
		60		6	
3	120		30		0
		90		6	
4	210		36		
		126			
5	336				

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh: $U_0 = 6$; $\Delta U_0 = 18$; $\Delta^2 U_0 = 18$; dan $\Delta^3 U_0 = 6$.

2. Dari Tabel 3 kemudian ditentukan U_x dengan menggunakan teorema Newton yaitu persamaan (8) didapatkan $U_x = 6 + 18x^{(1)} + 9x^{(2)} + x^{(3)}$, dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai *x* = 0 , suku ke-*n* sesuai dengan nilai $x = n-1$.

3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = 6+18x^{(1)} + 9x^{(2)} + x^{(3)}$, persamaan (11) sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=0}^{n-1} U_x = \Delta^{-1}\left\{6+18x^{(1)} + 9x^{(2)} + x^{(3)}\right\}\Big]_0^n$$

$$S_n = \left\{6x^{(1)} + 9x^{(2)} + 3x^{(3)} + \frac{1}{4}x^{(4)}\right\}\Big]_0^n$$

$$S_n = 6n^{(1)} + 9n^{(2)} + 3n^{(3)} + \frac{1}{4}n^{(4)}$$

$$S_n = 6n + 9n(n-1) + 3n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

3.2 Deret Geometri

Berdasarkan persamaan (1.g), jika suku awal $U_1 = a$, maka deret tersebut dapat dinotasikan dengan $a + ar + ar^2 + ... + ar^k + ... + ar^{n-1}, r \neq 1$ dan jumlah n suku pertamanya adalah $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n}\left(ar^{i-1}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(ar^i\right)$ Berdasarkan langkah-langkah penyelesaian dalam penelitian ini dilakukan sebagai berikut

1. Suku Umum $U_x = ar^x$ dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai x = 0, suku ke-n sesuai dengan nilai $x = n-1$.
2. Jumlah n suku pertamanya diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = ar^x$, persamaan (11) sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=0}^{n-1} U_x = \sum_{x=0}^{n-1}\left(ar^x\right)$$

$$S_n = \Delta^{-1}\left\{ar^x\right\}\Big]_0^n = a\frac{r^x}{r-1}\Bigg]_0^n$$

$$S_n = a\left(\frac{r^n - 1}{r-1}\right).$$

3.3 Deret Aritmatika Bertingkat dengan Landasan Deret Geometri

Contoh 2 Untuk menentukan rumus jumlah n suku pertama dari, lan $5+10+17+28+47+82+...$ langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

1. dibuat tabel beda hingga dari $5+10+17+28+...$Tabel 4 Beda Hingga dari $5+10+17+28+47+...$

x	U_x	ΔU_x	$\Delta^2 U_x$
1	5		
		5	
2	10		2
		7	
3	17		4
		11	
4	28		8
		19	
5	47		16
		35	
6	82		

2. Dari data yang didapatkan pada Tabel 4, kolom beda tingkat dua membentuk deret geometri dengan rasio 2, maka suku umum $U_x = f(x) + a.p^x$ dengan menggunakan teorema Newton yaitu persamaan (8) berbentuk $U_x = A.2^x + B.x^{(1)} + C$

$$\left.\begin{aligned} U_x &= A.2^x + B.x^{(1)} + C. \\ \Delta U_x &= A.2^x + B \\ \Delta^2 U_x &= A.2^x \end{aligned}\right\} \text{untuk } x=1, \text{ didapatkan } \begin{aligned} &2A+B+C=5 \\ &2A+B=5 \\ &2A=2 \end{aligned}$$

$A=1$, $B=3$ dan $C=0$, sehingga diperoleh $U_x = 2^x + 3x^{(1)}$.

3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = 2^x + 3x^{(1)}$, sebagai berikut.

$$S_n = \sum_{x=1}^{n} U_x = \Delta^{-1}\left\{2^x + 3x^{(1)}\right\}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = \left\{2^x + \frac{3}{2}x^{(2)}\right\}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}(n+1)^{(2)}\right) - \left(2^1 + \frac{3}{2}(1)^{(2)}\right)$$

$$S_n = 2^{n+1} + \frac{3}{2}n(n+1) - 2.$$

Bukti: Pembuktian rumus $S_n = 5+10+17+28+...+\left(2^x+3x\right) = 2^{n+1} + \frac{3}{2}n(n+1) - 2$ dengan menggunakan induksi matematika:

1. Langkah dasar, diuji untuk *n* = 1

Ruas kiri $2^1 + 3.1 = 5$ sama dengan dan ruas kanan $2^{1+1} + \frac{3}{2}.1(1+1) - 2 = 5$.

Jadi pernyataan benar untuk *n* = 1.

2. Langkah induksi, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu

$S_k = 5+10+17+28+...+\left(2^k+3k\right) = 2^{k+1} + \frac{3}{2}k(k+1) - 2, \ldots \text{ (1)}$ sehingga harus dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k+1$, yaitu

$$S_{k+1} = 5+10+17+28+...+\left(2^{k+1}+3(k+1)\right) = 2^{(k+1)+1} + \frac{3}{2}(k+1)((k+1)+1) - 2$$

$$S_{k+1} = 5+10+17+28+...+\left(2^{k+1}+3(k+1)\right) = 2^{k+2} + \frac{3}{2}(k+1)(k+2) - 2, \ \ldots \text{ (2)}$$

mulai dengan (1) ditambahkan $2^{k+1} + 3(k+1)$ pada kedua ruas maka diperoleh

$$S_k + U_{k+1} = S_{k+1}$$

$$\left\{2^{k+1} + \frac{3}{2}k(k+1) - 2\right\} + \left\{2^{k+1} + 3(k+1)\right\} = 2^{k+1}.2 + \frac{3}{2}(k+1)\left[(k+2)\right] - 2$$

$$= 2^{k+2} + \frac{3}{2}(k+1)(k+2) - 2.$$

dimana bentuk ini telah sesuai dengan yang diminta pada (2), dengan demikian telah terbukti bahwa pernyataan di atas benar untuk setiap n.

3. 4.Deret dengan Rumus Suku ke-*n* Diketahui

Jika suatu deret bukan merupakan deret aritmatika atau bukan deret geometri tetapi mempunyai pola yang jelas dengan rumus suku ke-*n* (U_n) diketahui, misalnya persamaan (1) dan persamaan (10)

Contoh 3 Untuk mendapatkan rumus (1.b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ langkah-langkahnya adalah:

1.Rumus $U_x = x^2$ sudah diketahui dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai $x=1$, suku ke-n sesuai dengan nilai $x=n$;
2. $U_x = x^2$ dinyatakan dengan menggunakan polinomial faktorial yaitu persamaan (3) senilai dengan $U_x = x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}$; $\blacksquare$
3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}$, sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=1}^{n} U_x = \sum_{x=1}^{n}\left(x^{(2)} + x^{(1)}\right)$$

$$S_n = \Delta^{-1}\left\{x^{(2)} + x^{(1)}\right\}\Big]_1^{n+1} = \frac{1}{3}x^{(3)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = \left(\frac{1}{3}(n+1)^{(3)} + \frac{1}{2}(n+1)^{(2)}\right) - 0$$

$$S_n = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n$$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(n-1)+3\right\}$$

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Bukti: Pembuktian rumus $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dengan Induksi Matematika adalah:

1.Langkah dasar, diuji untuk n = 1

Ruas kiri sama dengan 1^2 = 1 dan ruas kanan $\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = 1$

Jadi pernyataan benar untuk n = 1.

2. Langkah induksi dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$ yaitu $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, ...(1) sehingga harus dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k+1$ yaitu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \quad .....(2)$$

Mulai dengan (1) ditambahkan $(k+1)^2$ pada kedua ruas maka diperoleh

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right]$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)\left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right] \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2 + 7k + 6\right]$$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ dimana bentuk ini telah sesuai dengan yang diminta pada (2), dengan demikian telah terbukti bahwa pernyataan di atas benar untuk setiap n.

Contoh 4 Untuk memperoleh rumus jumlah *n* suku pertama (S_n) dari $(1.2.3)+(2.3.4)+(3.4.5)+...+(n.(n+1)(n+2))$ maka langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

1. rumus $U_x = x(x+1)(x+2)$ sudah diketahui dengan suku ke-1sesuai dengan nilai *x* = 1, suku ke-*n* sesuai dengan nilai *x = n;*
2. $U_x = x(x+1)(x+2)$ dituliskan dengan menggunakan polinomial faktorial yaitu persamaan (3) senilai dengan $U_x = x(x+1)(x+2) = (x+2)^{(3)}$;
3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = (x+2)^{(3)}$, sebagai berikut.

Bukti: Pembuktian rumus

$$1.2.3)+(2.3.4)+...+(n.(n+1)(n+2)) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

1. langkah dasar, diuji untuk *n* = 1

Ruas kiri $1(1+1)(1+2)=6$ sama dengan dan ruas kanan $\frac{1}{4}.1(1+1)(1+2)(1+3)=6$ .Jadi pernyataan benar untuk *n* = 1.

2. langkah induksi, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk *n = k*

$$S_k = (1.2.3)+(2.3.4)+...+(k.(k+1)(k+2)) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)...(1)$$

sehingga harus dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k+1$, yaitu

$$S_{k+1} = (1.2.3)+(2.3.4)+...+((k+1)(k+2)(k+3)) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)...(2)$$

mulai dengan (1) ditambahkan $(k+1)(k+2)(k+3)$ pada kedua ruas maka diperoleh $S_k + U_{k+1} = S_{k+1}$

$$\left\{\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)\right\} + \{(k+1)(k+2)(k+3)\} = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)\{k+4\}$$

$$\left\{\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)\right\} + \{(k+1)(k+2)(k+3)\} = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4).$$

dimana bentuk ini telah sesuai dengan yang diminta pada (2), dengan demikian telah terbukti bahwa pernyataan di atas benar untuk setiap *n*. $\blacksquare$

Contoh 5 Untuk menentukan rumus S_n dari

$$\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + ... + \frac{1}{(n+3)(n+4)},$$

langkah-langkah yang harus dilakukan adalah:

1. rumus $U_x = \frac{1}{(x+3)(x+4)}$ sudah diketahui dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai *x* = 1, suku ke-*n* sesuai dengan nilai *x* = *n*;
2. $U_x = \frac{1}{(x+3)(x+4)}$ dinyatakan dengan menggunakan polinomial faktorial yaitu persamaan (4) sebagai berikut.

$$U_x = \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{(x+4)^{(2)}}$$

$$= (x+4-2)^{(-2)} = (x+2)^{(-2)}.$$

3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = (x+2)^{(-2)}$, sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=1}^{n} U_x = \Delta^{-1}\left\{(x+2)^{(-2)}\right\}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = -(x+2)^{(-1)}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = -\left[(n+3)^{(-1)} - 3^{(-1)}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{(3+1)^{(1)}} - \frac{1}{(n+3+1)^{(1)}}$$

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$$

Contoh 6 Untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama (S_n) dari $\frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.4.6} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ berdasarkan langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut.

1. Rumus $U_x = \frac{1}{x(x+1)(x+3)}$ sudah diketahui dengan suku ke-1 sesuai dengan nilai $x = 1$, suku ke-n sesuai dengan nilai $x = n$.

2. $U_x = \frac{1}{x(x+1)(x+3)}$ dituliskan dengan menggunakan polinomial faktorial yaitu persamaan (4) sebagai berikut.

$$U_x = \frac{1}{x(x+1)(x+3)} = \frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$U_x = \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{2}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$U_x = \frac{1}{(x+3)^{(3)}} + \frac{2}{(x+3)^{(4)}}$$

$$U_x = (x+3-3)^{(-3)} + 2(x+3-4)^{(-4)}$$

$$U_x = x^{(-3)} + 2(x-1)^{(-4)}.$$

3. S_n diperoleh dengan mengintegralkan $U_x = x^{(-3)} + 2(x-1)^{(-4)}$, sebagai berikut

$$S_n = \sum_{x=1}^{n} U_x = \sum_{x=1}^{n}\left\{x^{(-3)} + 2(x-1)^{(-4)}\right\}\Big]_1^{n+1} \quad S_n = \Delta^{-1}\left\{x^{(-3)} + 2(x-1)^{(-4)}\right\}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = \left\{-\frac{1}{2}x^{(-2)} - \frac{2}{3}(x-1)^{(-3)}\right\}\Big]_1^{n+1}$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[(n+1)^{(-2)} - (1)^{(-2)}\right] - \frac{2}{3}\left[(n)^{(-3)} - 0^{(-3)}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1+2)^{(2)}} - \frac{1}{(1+2)^{(2)}}\right] - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(n+3)^{(3)}} - \frac{1}{(0+3)^{(3)}}\right]$$

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+3)(n+2)} - \frac{1}{3.2}\right] - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)} - \frac{1}{3.2.1}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{12} + \frac{1}{9} - \frac{3(n+1)+4}{6(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$S_n = \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

Bukti: Pembuktian rumus $S_n = \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{7}{36} - \frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$ dengan menggunakan induksi matematika adalah:

1. langkah dasar, diuji untuk $n = 1$

Ruas kiri $\frac{1}{1(1+1)(1+3)} = \frac{1}{8}$ sama dengan dan ruas kanan $\frac{7}{36} - \frac{3.1+7}{6(1+1)(1+2)(1+3)} = \frac{7}{36} - \frac{5}{72} = \frac{1}{8}$.

Jadi pernyataan benar untuk $n = 1$.

2. langkah induksi, dengan mengasumsikan bahwa pernyataan benar untuk $n = k$

$$S_k = \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + ... + \frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{7}{36} - \frac{3k+7}{6(k+1)(k+2)(k+3)} ...(1)$$

sehingga harus dibuktikan bahwa pernyataan juga benar untuk $n = k+1$, yaitu

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2.4} + \frac{1}{2.3.5} + ... + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+3)} = \frac{7}{36} - \frac{3(k+1)+7}{6((k+1)+1)((k+2)+1)((k+3)+1)}$$

$$S_{k+1} = \frac{7}{36} - \frac{3k+10}{6((k+2)((k+3)((k+4)}, ... (2)$$

mulai dengan (1) ditambahkan $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}$ pada kedua ruas

maka diperoleh $S_k + U_{k+1} = S_{k+1}$

$$\left\{\frac{7}{36} - \frac{3k+7}{6(k+1)(k+2)(k+3)}\right\} + \left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+4)}\right\} = \frac{7}{36} - \frac{(3k+7)(k+4)-6(k+3)}{6(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{7}{36} - \frac{3k^2+13k+10}{6(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{7}{36} - \frac{(3k+10)(k+1)}{6(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{7}{36} - \frac{(3k+10)}{6(k+2)(k+3)(k+4)}.$$

dimana bentuk ini telah sesuai dengan yang diminta pada (2), dengan demikian telah terbukti bahwa pernyataan di atas benar untuk setiap n.

4. PENUTUP

Metode beda hingga dan teorema Newton dapat dimanfaatkan dan lebih efisien untuk menentukan rumus umum jumlah *n* suku pertama suatu deret yang mempunyai aturan tertentu, dengan cara sebagai berikut.

1. Buat tabel beda hingga.
2. Data yang diperoleh dari tabel beda hingga disubtitusikan ke teorema Newton untuk mendapatkan U_n .
3. S_n didapatkan dengan mengintegralkan U_n .

Berdasarkan hasil metode beda hingga dan teorema Newton untuk menentukan rumus jumlah *n* suku pertama suatu deret yang mempunyai aturan tertentu, maka masalah yang perlu diteliti lebih lanjut adalah untuk menggembangkan metode lain atau untuk deret-deret lain yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Lovasz,L., Pelikan,J., & Vesztergombi,K.2003. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. New York: Inc.

[2] Nasoetion, A.H., Hasibuan, K.M. (almarhum), Martono, T., dan Sumantri, B . 1993. *Matematika 1*. Jakarta: Departemen Pendidika dan Kebudayaan.

[3] Purcell, E.J., & Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid 1 dan jilid 2*. Edisi Kelima. Alih bahasa oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh. 1999. Departemen Matematika Institut Teknologi Bandung (ITB): Erlangga.

[4] Rosen, K.H. 2007. *Discrete Mathematics And Its Applications*. Sixth Edition.Mc Graw – Hill International Edition.Printed in Singapore

[5] Soehardjo. 2000a. *Kalkulus Beda Hingga*. Terbatas untuk lingkungan sendiri, FMIPAITS. Surabaya.

[6] Soehardjo. 2000b.” Jumlah Deret Tanpa Rumus Khusus”. Tidak Dipublikasikan Makalah Seminar Matematika. Program studi teknik Manufaktur Universitas

[7] Surabaya bekerjasama dengan Musyawarah Guru Matematika Kodya Jember.